Алгоритм решения олимпиадной задачи по информатике «Травля тараканов», основанный на поиске вершинных покрытий графов

Ю. В. Кулаков, email: kulak@list.ru [1]

[1] Тамбовский государственный технический университет

Аннотация. *В данной работе рассматривается алгоритм решения олимпиадной задачи по информатике «Травля тараканов», основанный на поиске наименьшего множества вершин, покрывающих остальные вершины дерева тараканьих гнёзд.*

Ключевые слова: *дерево тараканьих гнёзд, матрица смежностей, матрица достижимостей, наименьшее вершинное покрытие, мощность наименьшего вершинного покрытия.*

Введение

Одной из целей преподавания информатики является пропаганда научных знаний и подготовка обучающихся к участию во всероссийских и международных олимпиадах по информатике и программированию. Поэтому весьма актуальными задачами являются поиск подходящих математических моделей для представления олимпиадных задач по информатике и разработка эффективных алгоритмов их решения.

Найдём подходящую математическую модель и разработаем алгоритм решения известной олимпиадной задачи по информатике «Травля тараканов» [1].

1. Постановка олимпиадной задачи

Произошло ужасное событие – в квартире доктора Шелдона Купера завелись тараканы! Пока все насекомые не будут убиты, Шелдон не успокоится.

Чтобы вычислить тараканьи гнёзда, Шелдон поймал одного таракана. Проведя эксперимент, доктор выяснил, что этот таракан является разведчиком, а значит, посещает все гнёзда. Установив на таракане маленький передатчик, Шелдон отпустил его.

Проследив путь таракана в течение нескольких часов, доктор узнал всю информацию о гнёздах и путях между ними. Оказалось, что количество гнёзд равно n, а между каждой парой гнёзд существует ровно один тараканий путь. Таким образом, все пути образуют дерево, в вершинах которого располагаются гнёзда, соединенные неориентированными рёбрами – отрезками пути.

Шелдон – вундеркинд, и ещё в девять лет выяснил, что каждый таракан за день по своей любопытности посетит все гнёзда, которое находится не более, чем в k отрезках пути от гнезда, в котором он этот день начал. Также Шелдон считает, что до его действий в каждом гнезде есть хотя бы один таракан.

После сбора всей информации, Шелдон хочет заразить некоторые гнёзда ядом так, чтобы каждый таракан в течение следующего дня побывал хотя бы в одном заражённом гнезде. Для экономного использования яда, Шелдон написал программу, которая вычисляет наименьшее число гнёзд, которые необходимо заразить.

В первой строке исходных данных содержатся целые числа n и k – количество гнёзд и наибольшее разрешенное расстояние для посещения тараканами окрестных гнёзд.

Следующие $(n-1)$ строк содержат описание рёбер дерева. Каждая строка содержит описание одного ребра – номера гнёзд, которые соединяет это ребро. Гнёзда нумеруются целыми числами от 1 до n.

Выходными данными является единственное целое число – наименьшее число гнёзд, которые необходимо заразить.

2. Алгоритм решения задачи

В решаемой задаче «Травля тараканов» система из n тараканьих гнёзд моделируется деревом, вершины которого представляют сами гнёзда, а неориентированные рёбра – пути между ними. Каждый таракан за день посещает все окрестные гнёзда, которые находятся на расстоянии не более чем k рёбер от своего гнезда. Требуется определить для заданных целых n, k и рёбер дерева, наименьшее число гнёзд, которые необходимо заразить ядом с целью избавления от тараканов в течение следующего дня.

Разработан алгоритм решения задачи «Травля тараканов», использующий понятия вершинного покрытия, матрицы смежностей и матрицы достижимостей [2]. Представим его словесно.

Шаг 1. Ввести исходные данные: число гнёзд n, расстояние k и рёбра дерева гнёзд G.

Шаг 2. Если $k = 0$, то вывести n и конец алгоритма; иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 3. Если $k \geq n-1$, то вывести 1 и конец алгоритма; иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 4. Построить матрицу смежностей $S(G)$ дерева гнёзд G.

Шаг 5. Вычислить матрицу достижимостей $D(G)$ дерева гнёзд G: если $k = 1$, то путем заполнения единицами главной диагонали матрицы смежностей $S(G)$; иначе – как сумму степеней матрицы смежностей $S(G)$ с первой по k-ую.

Шаг 6. Сократить матрицу достижимостей $D(G)$ путём поглощения её строк и столбцов.

Шаг 7. Найти наименьшее вершинное покрытие дерева гнёзд G как наименьшее покрытие столбцов строками сокращённой матрицы достижимостей $D'(G)$ дерева гнёзд G.

Шаг 8. Вывести мощность наименьшего вершинного покрытия дерева гнёзд G и конец алгоритма.

Рассмотрим решение задачи по представленному алгоритму в каждом из четырёх характерных случаев исходных данных.

К первому характерному случаю относятся все исходные данные, в которых $k = 0$ (все тараканы сидят по своим гнёздам). Нетрудно понять, что при этом необходимо заразить все n гнёзд, то есть ответом является число n.

Например, для исходных данных, в которых $k = 0$ и $n = 8$ ответом должно быть число 8.

Во втором случае исходные данные характерны тем, что $k \geq n - 1$. Из теории графов известно, что в любом дереве G с n вершинами имеется ровно $(n - 1)$ рёбер. Следовательно, при $k \geq n - 1$ достаточно заразить только одно гнездо, то есть ответом является число 1.

Например, даже в худшем с точки зрения решения нашей задачи вырожденном дереве (с максимальным расстоянием между конечными вершинами), представленном на рис. 1, число вершин равно 5, а при $k \geq 5 - 1 = 4$ достаточно заразить одно любое гнездо из пяти гнёзд.

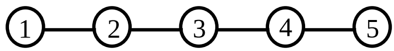

Рис. 1. Пример вырожденного дерева гнёзд для второго характерного случая исходных данных

В третьем характерном случае исходные данные таковы, что $k = 1$ и $n > 2$. При такой ситуации ответ задачи сразу назвать нельзя, а для её решения необходимо определить мощность наименьшего вершинного покрытия, элементы которого покрывают через соответствующие пути длины 1 (рёбра) все остальные вершины графа.

Определение мощности наименьшего вершинного покрытия выполним на примере исходных данных, когда $k = 1$ (тараканы за день посетят все гнёзда, которые находятся не более, чем в одном отрезке пути от гнёзд, в которых они этот день начали), в дереве гнёзд $n = 8$ вершин и семь рёбер (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 7), (6, 8).

Таким исходным данным соответствует дерево, изображённое на рис. 2.

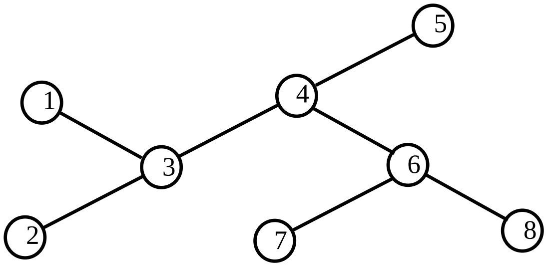

Рис. 2. Пример дерева гнёзд для третьего и четвёртого характерного случая исходных данных

Представим этот граф матрицей смежностей:

$S(G) =$

1	2	3	4	5	6	7	8	
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	2
1	1	0	1	0	0	0	0	3
0	0	1	0	1	1	0	0	4
0	0	0	1	0	0	0	0	5
0	0	0	1	0	0	1	1	6
0	0	0	0	0	1	0	0	7
0	0	0	0	0	1	0	0	8

.

Заполнив главную диагональ матрицы смежностей $S(G)$ единицами, получим матрицу достижимостей:

$D(G) =$

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	0	0	0	0	3
0	0	1	1	1	1	0	0	4
0	0	0	1	1	0	0	0	5
0	0	0	1	0	1	1	1	6
0	0	0	0	0	1	1	0	7

.

0	0	0	0	0	1	0	1	8

Найдем наименьшее множество строк матрицы достижимостей $D(G)$, покрывающих все её столбцы. Для облегчения этого поиска произведём поглощение строк и столбцов матрицы.

Строка 3 матрицы $D(G)$ поглощает строки 1 и 2, поскольку множества единиц в строках 1 и 2 содержатся во множестве единиц строки 3. Аналогично, строка 4 поглощает строку 5, строка 6 поглощает строки 7 и 8. Пометим поглощённые строки серым цветом:

$D(G) =$

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	0	0	0	0	3
0	0	1	1	1	1	0	0	4
0	0	0	1	1	0	0	0	5
0	0	0	1	0	1	1	1	6
0	0	0	0	0	1	1	0	7
0	0	0	0	0	1	0	1	8

.

С учётом поглощённых строк столбец 1 матрицы $D(G)$ поглощает столбцы 2, 3 и 4, поскольку множества единиц столбцов 2, 3 и 4 содержат в себе множество единиц столбца 1. Аналогично, столбец 5 поглощает столбец 6, столбец 7 поглощает столбец 8. Пометим и поглощённые столбцы серым цветом:

$D(G) =$

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	0	0	0	0	3
0	0	1	1	1	1	0	0	4
0	0	0	1	1	0	0	0	5
0	0	0	1	0	1	1	1	6
0	0	0	0	0	1	1	0	7
0	0	0	0	0	1	0	1	8

.

Вычеркнув из матрицы $D(G)$ поглощённые столбцы и строки, получим сокращённую матрицу достижимостей:

$$D'(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 5 & 7 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \end{array} \begin{matrix} \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} .$$

Множество строк {3, 4, 6} матрицы $D'(G)$ является наименьшим множеством строк матрицы $D(G)$, покрывающих все её столбцы, и является наименьшим вершинным покрытием остальных вершин {1, 2, 5, 7, 8} нашего дерева. Мощность наименьшего вершинного покрытия, равная 3, и является ответом в решаемой задаче для рассматриваемого примера.

Для исходных данных четвёртого характерного случая справедливо двойное неравенство $2 \le k < n-1$. В этом случае для решения задачи необходимо определить мощность наименьшего вершинного покрытия, элементы которого покрывают все остальные вершины графа через соответствующие цепи длины k.

Решим задачу на примере исходных данных, когда $k = 2$ (тараканы за день посетят все гнёзда, которые находятся не более, чем в двух отрезках пути от гнёзд, в которых они этот день начали), в дереве гнёзд $n = 8$ вершин и семь рёбер (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 7), (6, 8) (см. рис. 2).

В данном примере необходимо построить матрицу достижимостей $D(G)$ как сумму первой и второй степеней матрицы смежностей $S(G)$.

Вычислим сначала $S^2(G)$, понимая при этом под умножением и сложением конъюнкцию и дизъюнкцию соответственно:

$$S^2(G) = \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array} .$$

Затем получим матрицу достижимостей, сложив $S(G)$ и $S^2(G)$:

$$D(G) = \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{array} .$$

0	0	0	1	0	1	1	1	8

Найдём наименьшее множество строк матрицы достижимостей $D(G)$, покрывающих все её столбцы, при этом для облегчения отыскания наименьшего покрытия вначале произведём поглощение строк и столбцов.

Строка 1 матрицы $D(G)$ поглощает строку 2. Строка 3 поглощает строки 1 и 5. Строка 4 поглощает строки 3, 6, 7 и 8. Пометим поглощённые строки серым цветом:

$D(G) =$

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	2
1	1	1	1	1	1	0	0	3
1	1	1	1	1	1	1	1	4
0	0	1	1	1	1	0	0	5
0	0	1	1	1	1	1	1	6
0	0	0	1	0	1	1	1	7
0	0	0	1	0	1	1	1	8

.

С учётом поглощённых строк столбец 1 матрицы $D(G)$ поглощает все остальные столбцы (2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8). Пометим и поглощённые столбцы серым цветом:

$D(G) =$

1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	2
1	1	1	1	1	1	0	0	3
1	1	1	1	1	1	1	1	4
0	0	1	1	1	1	0	0	5
0	0	1	1	1	1	1	1	6
0	0	0	1	0	1	1	1	7
0	0	0	1	0	1	1	1	8

.

Вычеркнув из матрицы $D(G)$ поглощённые столбцы и строки, получим сокращённую матрицу:

$$D'(G) = \begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline & 1 & 4 \end{array} .$$

Множество из одной строки {4} сокращённой матрицы достижимостей $D'(G)$ является наименьшим множеством строк матрицы достижимостей $D(G)$, покрывающих все её столбцы, и является наименьшим вершинным покрытием остальных вершин {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8} нашего дерева G . Следовательно, ответом в решаемой задаче для рассматриваемого примера является число 1.

Заключение

Разработан алгоритм решения олимпиадной задачи по информатике «Травля тараканов». В нём поиск в дереве из n тараканьих гнёзд наименьшего числа гнёзд для заражения с целью избавления от всех тараканов в общем случае реализуется путём определения мощности наименьшего множества вершин, покрывающих остальные вершины дерева через соответствующие цепи не менее чем заданной в условии задачи длины k .

В особых случаях, когда $k = 0$ (все тараканы сидят по своим гнёздам), необходимо заразить все n гнёзд, а когда $k \geq n - 1$ (тараканы могут перемещаться на максимальные расстояния), достаточно заразить только одно любое гнездо.

Список литературы

1. Задача D. Травля тараканов [Электронный ресурс] : система для организации соревнований по программированию / Дальневосточный федеральный университет. – Режим доступа: https://imcs.dvfu.ru/cats/static/problem_text-cpid-892809.html

2. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Издательство «Мир», 1973. – 304 с.